

ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI 1. KOLA
62. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL (2012/2013)

Kategorie A

1. Najděte všechny dvojice prvočísel p, q , pro které existuje přirozené číslo a takové, že

$$\frac{pq}{p+q} = \frac{a^2+1}{a+1}.$$

(Ján Mazák, Róbert Tóth)

2. Dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ se vně dotýkají a leží ve čtverci $ABCD$ o straně a tak, že k_1 se dotýká stran AD a CD a k_2 se dotýká stran BC a CD . Dokažte, že aspoň jeden z trojúhelníků AS_1S_2 , BS_1S_2 má obsah nejvýše $\frac{3}{16}a^2$. *(Tomáš Jurík)*

3. Označme $p(n)$ počet všech n -místných čísel složených jen z číslic 1, 2, 3, 4, 5, v nichž se každé dvě sousední číslice liší alespoň o 2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$5 \cdot 2 \cdot 4^{n-1} \leq p(n) \leq 5 \cdot 2 \cdot 5^{n-1}.$$

(Pavel Novotný)

4. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro všechna nenulová čísla x, y platí

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot f(x).$$

(Pavel Calábek)

5. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC . Kružnice, která prochází vrcholem B a dotýká se přímky AI v bodě I , protíná strany AB, BC postupně v bodech P, Q . Průsečík přímky QI se stranou AC označme R . Dokažte, že platí

$$|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2.$$

(Jaroslav Švrček)

6. V oboru reálných čísel vyřešte soustavu rovnic

$$\sin^2 x + \cos^2 y = \operatorname{tg}^2 z,$$

$$\sin^2 y + \cos^2 z = \operatorname{tg}^2 x,$$

$$\sin^2 z + \cos^2 x = \operatorname{tg}^2 y.$$

(Pavel Calábek)

Kategorie B

1. Určete všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel, pro které platí

$$2^a + 4^b = 8^c.$$

(Jaroslav Švrček)

2. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$x^3 + (3\sqrt{2} - 2)x^2 - (1 + \sqrt{2})x - 14(\sqrt{2} - 1) = 0,$$

víte-li, že má alespoň jeden celočíselný kořen. Případné iracionální kořeny zapište v jednoduchém tvaru bez odmocnin iracionálních čísel. (Jaromír Šimša)

3. Nechtě V je průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC . Přímka CV je společnou tečnou kružnic k a l , které se vně dotýkají v bodě V a přitom každá z nich prochází jedním z vrcholů A a B . Jejich průsečíky s vnitřky stran AC a BC označme P a Q . Dokažte, že polopřímka VC je osou úhlu PVQ a že body A, B, P, Q leží na jedné kružnici. (Jaroslav Švrček)

4. Najděte nejmenší hodnotu zlomku

$$V(n) = \frac{n^3 - 10n^2 + 17n - 4}{n^2 - 10n + 18},$$

kde n je libovolné přirozené číslo větší než 2.

(Vojtech Bálint)

5. V rovině je dána úsečka AB . Pro libovolný bod X této roviny, který je různý od A i B , označme X_A , resp. X_B obraz bodu A , resp. B v osově souměrnosti podle přímky XB , resp. XA . Najděte všechny takové body X , které spolu s body X_A, X_B tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. (Pavel Calábek)

6. Je dáno přirozené číslo $k < 12$. Ve vrcholech pravidelného 12úhelníku jsou napsána čísla $1, 2, \dots, 12$ (jako na ciferníku hodin). V jednom kroku můžeme buď vyměnit některá dvě protilehlá čísla, nebo zvolit libovolných k sousedních vrcholů a v nich napsaná čísla zvětšit o 1. Jako $T(k)$ označme tvrzení, že po konečném počtu kroků lze dostat všech 12 čísel stejných. Dokažte, že $T(2)$ neplatí, $T(5)$ platí, a rozhodněte o platnosti $T(3)$. (Ján Mazák)

Kategorie C

1. Čtvercová tabulka je rozdělena na 16×16 políček. Kobylka se po ní pohybuje dvěma směry: vpravo nebo dolů, přičemž střídá skoky o dvě a o tři políčka (to jest žádné dva po sobě jdoucí skoky nejsou stejně dlouhé). Začíná skokem délky dva z levého horního políčka. Kolika různými cestami se může kobylka dostat na pravé dolní políčko? (Cestou rozumíme posloupnost políček, na která kobylka doskočí.) (Peter Novotný)

2. Pro kladná reálná čísla a, b, c, d platí

$$a + b = c + d, \quad ad = bc, \quad ac + bd = 1.$$

Jakou největší hodnotu může mít součet $a + b + c + d$? (Ján Mazák)

3. Je dán obdélník $ABCD$ s obvodem o . V jeho rovině najděte množinu všech bodů, jejichž součet vzdáleností od přímk AB, BC, CD, DA je roven $\frac{2}{3}o$. (Tomáš Jurík)
4. Rozhodněte, zda z libovolných sedmi vrcholů daného pravidelného 19úhelníku lze vždy vybrat čtyři, které jsou vrcholy lichoběžníku. (Jaromír Šimša)
5. Určete všechna celá čísla n , pro něž $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ je prvočíslo. (Jaroslav Švrček)
6. Uvnitř pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ s obsahem 30 cm^2 je zvolen bod M . Obsahy trojúhelníků ABM a BCM jsou po řadě 3 cm^2 a 2 cm^2 . Určete obsahy trojúhelníků CDM, DEM, EFM a FAM . (Pavel Leischner)