Masarykova univerzita • Přírodovědecká fakulta

Zuzana Došlá, Vítězslav Novák

NEKONEČNÉ ŘADY

Brno 2002

ISBN 80-210-1949-2

Kapitola 3

Řady absolutně a neabsolutně konvergentní

Předmětem této kapitoly budou číselné řady $\sum a_n$, kde $a_n \in \mathbb{R}$. Nejprve si všimneme speciálního případu, kterými jsou řady se střídavými znaménky, tzv. alternující řady. Dále zavedeme důležitý pojem pro řady s libovolnými členy, kterým je *absolutní*, resp. *neabsolutní konvergence*. Také se vrátíme k otázce z Kapitoly 1, zda pro nekonečné řady platí analogie komutativního zákona, tj. zda lze přerovnávat členy číselné řady, aniž se poruší její součet. Ukážeme, že pro přerovnávání řad je rozhodující právě skutečnost, zda jsou tyto řady absolutně konvergentní.

3.1. Alternující řady

Definice 3.1. Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *alternující*, právě když platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Vyloučíme-li případ řady, jejíž všechny členy jsou nulové, lze každou alternující řadu psát ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ nebo tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, kde $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pro alternující řady platí následující Leibnizovo kritérium konvergence.

Věta 3.1 (Leibnizovo kritérium). *Nechť a_n je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Pak alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konverguje právě tehdy, když platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz. Nutnost uvedené podmínky plyne ihned z Věty 1.1, neboť vztah $\lim a_n = 0$ je ekvivalentní se vztahem $\lim[(-1)^{n-1} a_n] = 0$. Dokážeme její dostatečnost. Nechť jsou předpoklady věty splněny a uvažme posloupnost $\{s_n\}$ částečných součtů řady $\sum(-1)^{n-1}a_n$. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Protože je zde každý sčítanec nezáporný, platí $s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2n}$, tj. vybraná posloupnost $\{s_{2n}\}$ je neklesající. Analogicky je

$$s_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

a protože opět čísla v závorkách jsou nezáporná, je $s_1 \geq s_3 \geq \cdots \geq s_{2n+1}$, takže $\{s_{2n+1}\}$ je nerostoucí. Obě posloupnosti $\{s_{2n}\}$, $\{s_{2n+1}\}$ jsou tedy monotonní a obě jsou ohraničené, neboť pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_1 - a_2 = s_2 \leq s_{2n} < s_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n+1} \leq s_1 = a_1.$$

Podle věty o monotonních posloupnostech jsou tedy obě konvergentní a přitom mají stejnou limitu, neboť $\lim s_{2n+1} - \lim s_{2n} = \lim(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim a_{2n+1} = 0$. Je-li $\lim s_{2n} = \lim s_{2n+1} = s$, pak zřejmě i $\lim s_n = s$, takže $\sum(-1)^{n-1}a_n$ je konvergentní a má součet s. □

Příklad 3.1. Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n+1}{2n-3} \qquad \text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n-\ln n} \quad .$$

Řešení. Všechny uvedené řady jsou alternující; ověříme, zda jsou splněny podmínky Leibnizova kritéria (Věta 3.1).

a) Tato alternující řada se nazývá *Leibnizova řada*. Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je klesající a platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Proto podle Leibnizova kritéria Leibnizova řada konverguje. Později ukážeme, že její součet je $\ln 2$ (viz Příklad 6.4).

b) Platí $\lim a_n = \frac{3}{2}$, a proto je daná řada divergentní.

c) Nejprve ověřme, zda je posloupnost $\{\frac{1}{n-\ln n}\}$ klesající. Uvažujme funkci $y = \frac{1}{x-\ln x}$. Platí, že

$$y' = \Big(\frac{1}{x-\ln x}\Big)' = -\frac{1}{(x-\ln x)^2}\Big(1 - \frac{1}{x}\Big) < 0 \quad \text{pro } x > 1,$$

tj. tato funkce je klesající na intervalu $(1, \infty)$, odkud plyne, že také posloupnost $\{\frac{1}{n-\ln n}\}$ je klesající. Dále je $\lim(n - \ln n) = \lim \ln \frac{e^n}{n} = \infty$, a proto $\lim \frac{1}{n-\ln n} = 0$. Podle Leibnizova kritéria daná řada konverguje.

3.2. Absolutní konvergence číselných řad

Věta 3.2. *Konverguje-li řada* $\sum |a_n|$, *konverguje i řada* $\sum a_n$.

Důkaz. Nechť $\sum |a_n|$ konverguje a buď $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak podle Cauchyova–Bolzanova kritéria konvergence (Lemma 1.1) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a libovolné $m \in \mathbb{N}$ platí: $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon$. Potom též platí, že $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+m}| \leq |a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+m}| < \varepsilon$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $m \in \mathbb{N}$, tj. podle Cauchy–Bolzanova kritéria řada $\sum a_n$ konverguje. $\square$

Opačná implikace neplatí, jak ukazuje příklad Leibnizovy řady $\sum (-1)^{(n-1)}\frac{1}{n}$: tato řada je konvergentní, avšak řada $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n}$ je divergentní. Proto má smysl zavést u řad s libovolnými členy silnější vlastnost než je konvergence:

Definice 3.2. Řekneme, že řada $\sum a_n$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum |a_n|$. Jestliže řada $\sum a_n$ konverguje a $\sum |a_n|$ diverguje, říkáme, že řada $\sum a_n$ *konverguje neabsolutně*.

Příklad 3.2. Leibnizova řada $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ je neabsolutně konvergentní, naopak řada $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ je absolutně konvergentní, neboť řada $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje (viz Příklad 2.1).

Lemma 3.1. *Nechť* $\sum a_n = s$ *je absolutně konvergentní řada. Pak platí* $|s| \leq \sum |a_n|$.

Důkaz. Označme $\{s_n\}$ posloupnost n-tých částečných součtů řady $\sum a_n$ a $\{t_n\}$ posloupnost n-tých částečných součtů řady $\sum |a_n|$. Protože $|s_n| \leq |t_n|$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, platí $\lim |s_n| = |s| \leq \lim t_n = \sum |a_n|$. (Tvrzení také okamžitě plyne z Poznámky 1.2, uvědomíme-li si, že $a_n \leq |a_n|$). $\square$

Řada $\sum |a_n|$ je řada s nezápornými členy, a proto můžeme pro určování absolutní konvergence řad použít všechna kritéria z Kapitoly 2.

Věta 3.3 (Srovnávací kritérium). *Nechť* $\sum b_n$ *je konvergentní řada s nezápornými členy a* $\sum a_n$ *je řada s libovolnými členy. Jestliže pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $|a_n| \leq b_n$, *pak řada* $\sum a_n$ *konverguje absolutně.*

Důkaz. Plyne z Věty 2.1. $\square$

Věta 3.4 (Odmocninové kritérium). *Jestliže pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, *pak řada* $\sum a_n$ *konverguje absolutně. Platí-li pro nekonečně mnoho* $n \in \mathbb{N}$ *nerovnost* $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, *pak tato řada diverguje.*

Existuje-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = q \in \mathbb{R}^*$, *pak v případě* $q < 1$ *řada* $\sum a_n$ *konverguje absolutně a v případě* $q > 1$ *řada diverguje.*

Důkaz. První a třetí tvrzení plyne z odmocninového kritéria pro řadu $\sum |a_n|$ (Věta 2.3). Je-li $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, je i $|a_n| \geq 1$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, takže neplatí $\lim a_n = 0$ a $\sum a_n$ diverguje podle Věty 1.1. □

Věta 3.5 (Podílové kritérium). *Buď $\sum a_n$ řada s nenulovými členy.*

Jestliže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje absolutně. Platí-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, řada diverguje.

Existuje-li $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, pak v případě $q < 1$ řada $\sum a_n$ konverguje absolutně a v případě $q > 1$ tato řada diverguje.

Důkaz. První a třetí tvrzení plyne z podílového kritéria pro řadu $\sum |a_n|$ (Věta 2.4). Je-li $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, tj. $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, je posloupnost $\{|a_n|\}$ neklesající, takže neplatí $\lim a_n = 0$ a $\sum a_n$ diverguje podle Věty 1.1. □

Příklad 3.3. Zjistěte, zda jsou následující řady absolutně konvergentní:

a) $$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)^3}$$

b) $$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln^n (n+1)} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 3} + \frac{1}{\ln^3 4} - \dots$$

c) $$\sum (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$$

d) $$\sum (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2}) \dots (2+\sqrt{n})} .$$

Řešení. Ve všech případech budeme ověřovat konvergenci řady $\sum |a_n|$.

a) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{(2n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3}$. Řada $\sum \frac{1}{n^3}$ je konvergentní, proto je podle Věty 3.3 daná řada absolutně konvergentní.

b) Platí:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n (n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln^n (n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0.$$

Podle Věty 3.4 je daná řada absolutně konvergentní.

c) Platí:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}{3} = \frac{e}{3} < 1.$$

Podle Věty 3.4 je daná řada absolutně konvergentní.

d) V tomto případě se ukazuje výhodné použít Raabeovo kritérium pro řadu $\sum |a_n|$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})\ \ldots\ (2+\sqrt{n})}\frac{(2+\sqrt{1})\ \ldots\ (2+\sqrt{n+1})}{\sqrt{(n+1)!}}-1\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}}=\infty,$$

proto je vyšetřovaná řada absolutně konvergentní.

Příklad 3.4. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$$

absolutně konvergentní, pro která neabsolutně a pro která diverguje.

Řešení. Pro $x \neq 0$ je

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{n}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x|=|x|.$$

Podle Věty 3.5 řada absolutně konverguje pro $|x| < 1$, pro $|x| > 1$ řada diverguje. Pro $x = 1$ dostáváme harmonickou řadu $\sum \frac{1}{n}$, která je divergentní, a pro $x = -1$ Leibnizovu řadu $\sum (-1)^{(n+1)}\frac{1}{n}$, která je neabsolutně konvergentní.

Na závěr tohoto odstavce uveďme dvě kritéria k určení konvergence řady s libovolnými členy. Jejich důkaz lze nalézt např. v [6, 13].

Věta 3.6 (Abelovo a Dirichletovo kritérium). *Nechť $\{b_n\}$ je monotonní posloupnost a platí jedna z následujících podmínek:*

1. *(Dirichlet) Posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$ je ohraničená a $\lim b_n = 0$;*
2. *(Abel) Řada $\sum a_n$ konverguje a posloupnost $\{b_n\}$ je ohraničená.*

Pak řada $\sum a_n b_n$ konverguje.

Příklad 3.5. Dokažte, že řada

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ konverguje pro libovolné $x \in \mathbb{R}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\sin n}{n}$ je konvergentní.

Řešení. a) Případ kdy $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ je triviální, neboť se jedná o nulovou řadu.

Nechť tedy $x \neq k\pi$. Položme $b_n = \frac{1}{n}$ a $a_n = \sin nx$. Ukážeme, že jsou splněny podmínky Dirichletova kritéria (Věta 3.6). Zřejmě je posloupnost $\{b_n\}$ monotonní a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Zbývá dokázat, že posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$ je ohraničená. Označme

$$\begin{aligned} s_n &= \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx, \\ r_n &= \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx, \\ q &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

Z Moivreovy věty plyne

$$q^n = (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx,$$

odkud

$$q^n - q^{-n} = \cos nx + i \sin nx - \big(\cos(-nx) + i \sin(-nx)\big) = 2i \sin nx.$$

Užitím těchto vzorců dostaneme

$$\begin{aligned} r_n + i s_n &= \cos x + i \sin x + \cos 2x + i \sin 2x + \cdots + \cos nx + i \sin nx = \\ &= q + q^2 + \cdots + q^n = q\frac{q^n - 1}{q - 1} = q\frac{q^{\frac{n}{2}}(q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}})}{q^{\frac{1}{2}}(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})} = q^{\frac{n+1}{2}}\frac{2i \sin \frac{n}{2}x}{2i \sin \frac{1}{2}x} = \\ &= \left(\cos\frac{n+1}{2}x + i \sin\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}. \end{aligned}$$

Nyní porovnáme reálnou a imaginární část

$$\begin{aligned} r_n &= \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\cos\frac{n+1}{2}x \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}, \\ s_n &= \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}. \end{aligned}$$

Odtud plyne $|s_n| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}x\right|}$, a proto je posloupnost $\{s_n\}$ částečných součtů řady $\sum \sin nx$ ohraničená. Tím jsme dokázali, že řada $\sum \frac{\sin nx}{n}$ je konvergentní pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

b) Použijeme Abelovo kritérium (Věta 3.6) při volbě $b_n = \sqrt[n]{n}$, $a_n = \frac{\sin n}{n}$. Podle předchozího příkladu $\sum a_n$ konverguje. Protože $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, je $\{b_n\}$ ohraničená; ukážeme ještě, že pro $n \geq 3$ je klesající. Vskutku, $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ právě když $n^{n+1} > (n+1)^n$, což je ekvivalentní $n > (1+\frac{1}{n})^n$ a tato nerovnost platí pro $n \geq 3$, neboť $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ je rostoucí posloupnost s limitou $e < 3$.

3.3. Přerovnávání řad

Již v první kapitole jsme ukázali, že s nekonečnými součty nemůžeme zacházet stejně jako se součty konečnými. V tomto odstavci se budeme zabývat analogií komutativního zákona – přerovnáváním nekonečných řad.

Zaveďme následující definici:

Definice 3.3. Nechť $\sum a_n$ je řada, $\{k_n\}$ permutace množiny $\mathbb{N}$ (tj. $\{k_n\}$ je prostá posloupnost přirozených čísel, v níž se každé přirozené číslo vyskytuje). Pak říkáme, že $\sum a_{k_n}$ vznikla *přerovnáním* řady $\sum a_n$.

Věta 3.7. *Nechť řada $\sum a_n$ konverguje absolutně. Pak konverguje absolutně také každá řada $\sum a_{k_n}$ vzniklá přerovnáním řady $\sum a_n$ a platí $\sum a_{k_n} = \sum a_n$.*

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože řada $\sum a_n$ je absolutně konvergentní, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ a libovolné $m \in \mathbb{N}$ platí $|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon$. Dále protože $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je permutace množiny $\mathbb{N}$, existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $\{1, 2, \ldots, n_0\} \subseteq \{k_1, k_2, \ldots, k_p\}$. Buď nyní $n > p$ a $m \in \mathbb{N}$ libovolné. Označíme-li $t = \max\{k_{n+1}, \ldots \ldots, k_{n+m}\}$, platí $|a_{k_{n+1}}| + \cdots + |a_{k_{n+m}}| \leq |a_{n_0+1}| + \cdots + |a_t| < \varepsilon$. Podle Cauchy-Bolzanova kritéria řada $\sum |a_{k_n}|$ konverguje, tj. řada $\sum a_{k_n}$ konverguje absolutně.

Zbývá dokázat, že obě řady mají stejný součet. Označme s_n částečné součty řady $\sum a_n$, t_n částečné součty řady $\sum a_{k_n}$. Pro $n > \max\{n_0, k_p\}$ platí

$$
\begin{aligned}
|s_n - t_n| = |a_1 + \cdots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n - (a_{k_1} + \cdots + a_{k_n})| \leq \\
\leq |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \cdots + |a_{n_0+q}| < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

kde $n_0 + q = \max\{n, k_1, \ldots, k_n\}$. Je tedy $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n - t_n) = 0$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$. □

Právě jsme dokázali, že pro absolutně konvergentní řady platí komutativní zákon. Vyvstává otázka, jak se chovají při přerovnávání neabsolutně konvergentní řady.

Zaveďme následující označení: pro $a \in \mathbb{R}$ položme

$$a^+ = \max\{a, 0\}, \quad a^- = \max\{-a, 0\}.$$

Potom je zřejmě $a^+ \geq 0$, $a^- \geq 0$, $a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$.

Proto je-li $\sum a_n$ nekonečná řada, můžeme uvažovat dvě nekonečné řady s nezápornými členy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Tyto řady mají následující vlastnost:

Lemma 3.2. *Nechť řada $\sum a_n$ konverguje neabsolutně. Pak obě řady $\sum a_n^+$ a $\sum a_n^-$ divergují k $+\infty$.*

Důkaz. Protože $\sum a_n^+$ a $\sum a_n^-$ jsou řady s nezápornými členy, každá z nich buď konverguje nebo diverguje k $+\infty$. Kdyby obě konvergovaly, pak by podle Věty 1.3 konvergovala i řada $\sum (a_n^+ + a_n^-) = \sum |a_n|$, tj. $\sum a_n$ by konvergovala absolutně. Kdyby např. $\sum a_n^+$ divergovala k $+\infty$, $\sum a_n^-$ konvergovala, pak by podle cvičení 1.2 řada $\sum (a_n^+ - a_n^-) = \sum a_n$ divergovala k $+\infty$. Tedy obě řady $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ divergují. □

Nyní můžeme dokázat větu o neabsolutně konvergentních řadách, která říká, jak „labilní“ jsou tyto řady vzhledem k přerovnávání.

Věta 3.8 (Riemannova). *Nechť řada $\sum a_n$ konverguje neabsolutně a nechť $s \in \mathbb{R}$ je libovolné. Pak existuje takové přerovnání $\sum a_{k_n}$ řady $\sum a_n$, že $\sum a_{k_n} = s$, existuje takové přerovnání $\sum a_{p_n}$ řady $\sum a_n$, že $\sum a_{p_n}$ určitě diverguje a takové přerovnání $\sum a_{q_n}$, že $\sum a_{q_n}$ osciluje.*

Důkaz. Dříve než provedeme přesný důkaz, naznačme velmi zjednodušeně, jakým způsobem bude důkaz veden. Myšlenkou důkazu tvrzení, že $\sum a_{k_n} = s$, je přerovnat danou řadu následujícím způsobem: nejdříve ponecháme kladné členy, dokud „nepřekročíme“ předepsaný součet. Poté začneme odčítat záporné členy až bude částečný součet řady menší než součet předepsaný a stejným způsobem pokračujeme dál. Nakonec dokážeme, že takto přeskládaná řada opravdu konverguje k předem určenému číslu.

(i) Ukažme, že lze řadu přerovnat tak, že přerovnaná řada konverguje a má součet s. Předpokládejme pro určitost, že $s > 0$. Nechť $n_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší takové, že $a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ > s$; vzhledem k divergenci $\sum a_n^+$ takové n_1 existuje. Nechť $m_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší takové, že $a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - (a_1^- + \cdots + a_{m_1}^-) < s$; existence takového m_1 plyne z divergence řady $\sum a_n^-$. Nechť dále $n_2 \in \mathbb{N}, n_2 > n_1$ je nejmenší takové, že $a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - (a_1^- + \cdots + a_{m_1}^-) + a_{n_1+1}^+ + \cdots + a_{n_2}^+ > s$. Takové n_2 opět existuje ze stejných důvodů jako n_1. V této konstrukci lze pokračovat indukcí; jejím výsledkem je jistá řada, která vznikla přerovnáním řady $\sum a_n$.

Dokažme, že součet takto přerovnané řady je s. Z konstrukce je patrné, že částečný součet $s_{n_1+m_1+\cdots+n_k}$ přerovnané řady se od požadovaného součtu s liší maximálně o $a_{n_k}^+$, částečný součet $s_{n_1+m_1+\cdots+n_k+m_k}$ se liší od s maximálně o $a_{m_k}^-$ a částečný součet s_n, kde $n_1 + m_1 + \cdots + n_k < n < n_1 + m_1 + \cdots + n_k + m_k$, resp. $n_1 + m_1 + \cdots + n_k + m_k < n < n_1 + m_1 + \cdots + n_k + m_k + n_{k+1}$ se liší od s nanejvýš o $\max\{a_{n_k}, a_{m_k}\}$ resp. o $\max\{a_{m_k}, a_{n_{k+1}}\}$. Protože $\sum a_n$ konverguje, je $\lim a_n = 0$, tedy i $\lim a_n^+ = \lim a_n^- = 0$; odtud $\lim s_n = s$.

(ii) Ukažme, že lze řadu přerovnat tak, že přerovnaná řada diverguje k ∞. Nechť $n_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší takové, že $a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ > 1$; $n_2 > n_1$ nejmenší takové, že $a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - a_1^- + a_{n_1+1}^+ + \cdots + a_{n_2}^+ > 2$, $n_3 > n_2$ nejmenší takové, že $a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - a_1^- + a_{n_1+1}^+ + \cdots + a_{n_2}^+ - a_2^- + a_{n_2+1}^+ + \cdots + a_{n_3}^+ > 3$ atd. Vzniklá přerovnaná řada určitě diverguje k ∞.

(iii) Obdobně určíme nejmenší $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ > 1$, nejmenší $m_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - (a_1^- + \cdots + a_{m_1}^-) < 0$, nejmenší $n_2 > n_1$ tak, že $a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - (a_1^- + \cdots + a_{m_1}^-) + a_{n_1+1}^+ + \cdots + a_{n_2}^+ > 1$ atd. Vzniklá přerovnaná řada osciluje.

□

Cvičení

3.1. Rozhodněte o konvergenci alternujících řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+100}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n-\ln n}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{5n-2}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$

3.2. Vyšetřete, které řady konvergují absolutně, které konvergují neabsolutně a které divergují:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{6^n}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

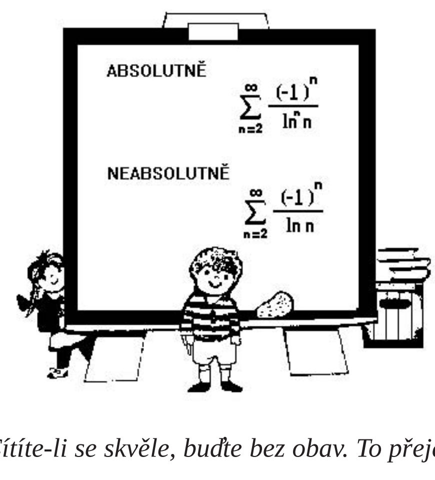
c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\ln n}$ g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{n^2}}{n!}$ h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

3.3. Určete, pro která reálná čísla x následující řady absolutně konvergují, pro která neabsolutně a pro která divergují:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2 x}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3 2^n} x^n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\mathrm{e}^{nx}}$



Cítíte-li se skvěle, buďte bez obav. To přejde.

Výsledky cvičení

Kapitola 1

1.1. a) 1 b) $\frac{11}{18}$ c) $\frac{23}{90}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{2}$ f) 3 g) 5 h) $\frac{14}{15}$ **1.2.** a) $-\frac{4}{33}$ b) $\frac{27}{50}$ **1.3.** a)–c) divergují **1.4.** a) $x = 10$ b) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$. **1.5.** Součet obvodů je $8(2 + \sqrt{2})$, součet obsahů je 8. **1.6.** Úloha vede k určení součtu nekonečné geometrické řady: $48 + 24 + 12 + 6 + \cdots$, jejíž součet je $s = 96$ cm^2. **1.7.** Obsah Sierpińského koberce je $P = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{9^{n+1}} = 0$.

Kapitola 2

2.1. a) konverguje b) konverguje c) konverguje d) diverguje e) konverguje pro $0 < a < 1$, diverguje pro $a \geq 1$ f) diverguje g) konverguje pro $a > 1$, diverguje pro $a \in (0, 1]$ h) konverguje i) konverguje j) konverguje k) konverguje l) diverguje m) konverguje n) diverguje o) diverguje pro $a \geq \frac{\pi}{2}$, konverguje pro $0 < a < \frac{\pi}{2}$ p) diverguje q) diverguje. **2.2.** $a_{2n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}}$, $a_{2n} = \frac{1}{3^{2n}}$. **2.3.** Neexistuje [Návod: je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak existuje $\{n_k\}$, $n_k \to \infty$ tak, že $\lim \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$. Označíme-li $b_k = a_{n_k}$, je řada $\sum b_k$ divergentní. Protože $a_n \geq 0$, je divergentní i řada $\sum a_n$. **2.4.** viz [5].

Kapitola 3

3.1. a) konverguje b) konverguje c) diverguje d) diverguje e) konverguje f) konverguje. **3.2.** a) konverguje neabsolutně b) konverguje absolutně c) konverguje neabsolutně d) diverguje e) konverguje absolutně f) konverguje absolutně g) konverguje absolutně h) konverguje neabsolutně. **3.3.** a) Pro $x > 0$ řada konverguje absolutně, pro $x \leq 0$ řada diverguje. b) Pro $x \in (\frac{1}{e}, e)$ řada konverguje absolutně, pro ostatní x řada diverguje. c) Pro $|x| < 2$ řada konverguje absolutně, pro $|x| > 2$ a $x = 2$ diverguje, pro $x = -2$ konverguje neabsolutně. d) Pro $x \geq 0$ řada konverguje absolutně, pro $x < 0$ řada diverguje.