Masarykova univerzita • Přírodovědecká fakulta

Zuzana Došlá, Vítězslav Novák

NEKONEČNÉ ŘADY

Brno 2002

ISBN 80-210-1949-2

Kapitola 2

Číselné řady s nezápornými členy

Stanovení součtu řad bývá v jednotlivých případech obtížný úkol. Proto se při vyšetřování řad často orientujeme na zjištění, zda řada konverguje či diverguje, aniž bychom určovali její součet. Předmětem této kapitoly jsou právě tyto úlohy pro řady s nezápornými členy. Odvodíme tzv. *kritéria konvergence*, udávající postačující podmínky pro konvergenci, resp. divergenci řady.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá řada s nezápornými (kladnými) členy, je-li $a_n \geq 0$ ($a_n > 0$) pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tyto řady mají některé specifické vlastnosti: posloupnost jejich částečných součtů $\{s_n\}$ je neklesající, neboť $s_{n+1} = a_{n+1} + s_n \geq s_n$. Je-li navíc tato posloupnost shora ohraničená, pak existuje vlastní $\lim s_n$, tj. řada $\sum a_n$ je konvergentní. Proto řady s nezápornými členy jsou buď konvergentní nebo určitě divergentní k ∞.

Věta 2.1 (Srovnávací kritérium). *Buďte $\sum a_n$, $\sum b_n$ řady s nezápornými členy a nechť $a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom platí: konverguje-li řada $\sum b_n$, konverguje i řada $\sum a_n$; diverguje-li řada $\sum a_n$, diverguje i řada $\sum b_n$.*

Důkaz. Důkaz provedeme pro případ, kdy platí $a_n \leq b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Platí-li $a_n \leq b_n$ až od jistého indexu počínaje, je důkaz analogický. Buď $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$, $\{t_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum b_n$; zřejmě platí $s_n \leq t_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Konverguje-li $\sum b_n$, pak je $\{t_n\}$ konvergentní, a proto shora ohraničená, tj. existuje $k \in \mathbb{R}$ tak, že $t_n \leq k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak je však i $s_n \leq k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, tj. $\{s_n\}$ je shora ohraničená. Navíc je neklesající, a proto má vlastní limitu, tudíž $\sum a_n$ konverguje.

Diverguje-li $\sum a_n$, pak diverguje i $\sum b_n$, neboť kdyby $\sum b_n$ konvergovala, pak podle první části tvrzení by konvergovala $\sum a_n$, což je spor. $\square$

Příklad 2.1. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}, \qquad \text{kde } a > 0,\ a \notin (1,2).$$

Řešení. a) Danou řadu porovnáme s řadou $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. Platí

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} \qquad \text{pro } n \geq 2.$$

Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je, jak jsme ukázali v Příkladu 1.2-a), konvergentní, a proto je podle Věty 2.1 konvergentní i řada $\sum \frac{1}{n^2}$.

b) Nechť $a \geq 2$. Platí

$$\frac{1}{n^a} < \frac{1}{n^2} \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N},$$

a proto je v tomto případě řada $\sum \frac{1}{n^a}$ konvergentní.

Je-li $a = 1$, jde o harmonickou řadu $\sum \frac{1}{n}$, která je, jak jsme ukázali v Příkladu 1.4, divergentní. Je-li $a \in (0,1)$, platí

$$\frac{1}{n^a} > \frac{1}{n} \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N},$$

a proto je podle Věty 2.1 divergentní i řada $\sum \frac{1}{n^a}$.

Celkem dostáváme, že řada $\sum \frac{1}{n^a}$ je konvergentní pro $a \geq 2$ a divergentní pro $a \in (0,1]$. Jiný způsob řešení, kdy vyřešíme i zbývající případ $a \in (1,2)$, uvedeme později (viz Příklad 2.6).

Věta 2.2 (Limitní srovnávací kritérium). *Buďte $\sum a_n$, $\sum b_n$ řady s nezápornými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Je-li $L < \infty$ a konverguje-li řada $\sum b_n$, pak konverguje i řada $\sum a_n$.
Je-li $L > 0$ a diverguje-li řada $\sum b_n$, pak diverguje i řada $\sum a_n$.

Důkaz. Nechť $L < \infty$ a $\sum b_n$ konverguje. K číslu $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon,$$

odkud $a_n < (L+\varepsilon)b_n$. Protože $\sum (L+\varepsilon)b_n$ konverguje, konverguje podle srovnávacího kritéria (Věta 2.1) i řada $\sum a_n$.

Nechť $L > 0$ a $\sum b_n$ diverguje. Je-li $0 < L < \infty$, pak existuje $\varepsilon > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $0 < L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n}$ pro všechna $n \geq n_0$. Odtud $(L - \varepsilon) b_n < a_n$ a podle srovnávacího kritéria (Věta 2.1) je řada $\sum a_n$ divergentní. V případě $L = \infty$ existuje $K > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{a_n}{b_n} > K$ pro všechna $n \geq n_0$. Podobně pak ze vztahu $a_n > K b_n$ plyne divergence řady $\sum a_n$. $\square$

Poznámka 2.1. Jsou-li $\sum a_n$, $\sum b_n$ řady s nezápornými členy a platí-li $a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, nazývá se $\sum b_n$ majorantní řadou k řadě $\sum a_n$ a řada $\sum a_n$ minorantní řadou k řadě $\sum b_n$.

Příklad 2.2. Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Řešení. a) Danou řadu porovnáme s harmonickou řadou $\sum \frac{1}{n}$, která je divergentní (Příklad 1.4). Podle l'Hospitalova pravidla určíme limitu

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi \cos \frac{\pi}{n} \left(\frac{1}{n}\right)'}{\left(\frac{1}{n}\right)'} = \lim_{n\to\infty} \pi \cdot \cos \frac{\pi}{n} = \pi.$$

Protože $L > 0$ a řada $\sum \frac{1}{n}$ diverguje, je podle Věty 2.2 divergentní i řada $\sum \sin \frac{\pi}{n}$.

b) Danou řadu porovnáme s řadou $\sum \frac{1}{n^2}$, která je, jak jsme ukázali v Příkladu 2.1, konvergentní. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \left(\frac{1}{n^2}\right)'}{\left(\frac{1}{n^2}\right)'} = 1.$$

Podle Věty 2.2 konverguje také řada $\sum \ln(1 + \frac{1}{n^2})$.

Věta 2.3 (Odmocninové kritérium — Cauchyovo). *Nechť $\sum a_n$ je řada s nezápornými členy.*

(i) Platí-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, pak řada konverguje. Platí-li pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, řada diverguje.

(ii) Existuje-li

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \qquad \text{kde } q \in \mathbb{R}^*, \tag{2.1}$$

pak v případě $q < 1$ řada $\sum a_n$ konverguje a v případě $q > 1$ řada $\sum a_n$ diverguje.

Poznámka 2.2. Tvrzení (ii) se nazývá *limitní odmocninové kritérium*. Poznamenejme, že je-li v (2.1) $q = 1$, nelze o konvergenci řady tímto kritériem rozhodnout.

Důkaz. Důkaz provedeme pro tvrzení (ii); důkaz tvrzení (i) probíhá analogicky.

Je-li $q < 1$, zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $q + \varepsilon < 1$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$, odkud $a_n < (q + \varepsilon)^n$. Řada $\sum (q + \varepsilon)^n$ je konvergentní geometrická řada, proto podle srovnávacího kritéria (Věta 2.1) také $\sum a_n$ konverguje.

Je-li $q > 1$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, tj. $a_n \geq 1$ a není splněna nutná podmínka konvergence (Věta 1.1). Proto $\sum a_n$ diverguje. $\square$

Příklad 2.3. Vyšetřete konvergenci, resp. divergenci následujících řad:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3 + \frac{1}{n})^n} \qquad \text{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n} \right)^{n^2} \qquad \text{c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{[5 + (-1)^n]^n}.$$

Řešení. a) Užijeme limitní odmocninové kritérium (Věta 2.3 (ii)). Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(3 + \frac{1}{n})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1,$$

neboť podle l'Hospitalova pravidla je $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Proto daná řada konverguje.

b) K vyšetření opět použijeme limitní odmocninové kritérium (Věta 2.3 (ii)). Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n} \right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n} \right)^{n}.$$

Jedná se o neurčitý výraz typu 1^{∞}, proto ho upravíme tak, abychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n} \right)^{n} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty} n \ln(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n})}$$

a pro limitu v exponentu již můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{n} \right)^{-1} \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{-1/2} \left(\frac{1}{n} \right)'}{\left(\frac{1}{n} \right)'} = -\frac{2}{\pi}\,.$$

Hledaná limita je $\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}} < 1$, tj. daná řada konverguje.

c) Zde máme

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{5 + (-1)^n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro liché } n, \\ \frac{1}{3} & \text{pro sudé } n. \end{cases}$$

Limitní odmocninové kritérium není použitelné. Protože však $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1}{2}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, z Věty 2.3 (i) plyne konvergence této řady.

Věta 2.4 (Podílové kritérium — d'Alembertovo). *Buď $\sum a_n$ řada s kladnými členy.*

(i) Platí-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje. Platí-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.

(ii) Existuje-li

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \qquad \text{kde } q \in \mathbb{R}^*, \tag{2.2}$$

pak v případě $q < 1$ řada $\sum a_n$ konverguje a v případě $q > 1$ řada $\sum a_n$ diverguje.

Poznámka 2.3. Tvrzení (ii) se nazývá *limitní podílové kritérium*. Poznamenejme, že je-li v (2.2) $q = 1$, nelze o konvergenci řady tímto kritériem rozhodnout.

Důkaz. Opět provedeme důkaz tvrzení (ii); důkaz tvrzení (i) probíhá analogicky.

Je-li $q < 1$, zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $q + \varepsilon < 1$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$ je

$$q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad (q - \varepsilon)a_n < a_{n+1} < (q + \varepsilon)a_n.$$

Odtud indukcí pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_0+k} \le (q + \varepsilon)^k a_{n_0}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(q + \varepsilon)^n$ je konvergentní geometrická řada, proto podle srovnávacího kritéria (Věta 2.1) také $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ konverguje, a proto podle Věty 1.2 také $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Je-li $q > 1$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$ je $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, tj. posloupnost $\{a_n\}$ je pro $n \ge n_0$ neklesající, a proto nemůže platit $\lim a_n = 0$ a $\sum a_n$ diverguje podle Věty 1.1. $\square$

Příklad 2.4. Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}\,.$$

Řešení. a) Podle limitního podílového kritéria (Věta 2.4 (ii)) dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1,$$

proto řada $\sum \frac{n^n}{n!}$ diverguje.

b) Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n 2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)} \cdot 2^n \cdot n!} = 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1,$$

a proto daná řada konverguje podle Věty 2.4.

Pro porovnání limitního podílového a limitního odmocninového kritéria použijeme následující tvrzení:

Lemma 2.1. *Nechť* $\{a_n\}$ *je posloupnost kladných čísel. Pak platí*

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Zejména, je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in \mathbb{R}^*$, *je také* $\lim \sqrt[n]{a_n} = a$.

Důkaz. Dokážeme nerovnost $\limsup \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$; důkaz vztahu $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf \sqrt[n]{a_n}$ by se provedl analogicky. Označme $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$. Je-li $a = \infty$, je tvrzení triviální; nechť tedy $a \in \mathbb{R}$. Buď $b \in \mathbb{R}$, $b > a$ libovolné; existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$ je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < b$. Napíšeme-li tuto nerovnost pro $n_0, n_0+1, \dots, n-1$ $(n > n_0)$ a všechny tyto nerovnosti vynásobíme, obdržíme $a_n < b^{n-n_0} a_{n_0}$, a proto

$$\sqrt[n]{a_n} < b^{\frac{n-n_0}{n}} \sqrt[n]{a_{n_0}}.$$

Ze spojitosti exponenciální funkce b^x plyne $\lim b^{\frac{n-n_0}{n}} = b$; dále platí $\lim \sqrt[n]{a_{n_0}} = 1$. Celkem $\lim b^{\frac{n-n_0}{n}} \sqrt[n]{a_{n_0}} = b$. To znamená, že je-li $\varepsilon > 0$ libovolné, existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \ge n_0$ tak, že pro $n \ge n_1$ je

$$b^{\frac{n-n_0}{n}} \sqrt[n]{a_{n_0}} < b + \varepsilon, \qquad \text{tj.} \qquad \sqrt[n]{a_n} < b + \varepsilon\,,$$

takže $\limsup \sqrt[n]{a_n} \le b + \varepsilon$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, platí i $\limsup \sqrt[n]{a_n} \le b$; protože $b > a$ bylo libovolné, plyne odtud $\limsup \sqrt[n]{a_n} \le a$. □

Z uvedeného lemmatu plyne, že je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, je také $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$. Proto můžeme-li o konvergenci nebo divergenci nějaké řady s nezápornými členy rozhodnout podílovým kritériem, pak můžeme rozhodnout i odmocninovým kritériem — říkáme, že odmocninové kritérium je silnější než podílové kritérium.

Následující kritérium uvádíme bez důkazu; ten lze nalézt např. v [6, 11, 13].

Věta 2.5 (Limitní Raabeovo kritérium). *Nechť* $\sum a_n$ *je řada s kladnými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q, \qquad \text{kde } q \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li $q > 1$, *pak řada* $\sum a_n$ *konverguje; je-li* $q < 1$, *pak řada* $\sum a_n$ *diverguje.*

Poznámka 2.4. Někdy se Raabeovo kritérium uvádí ve tvaru

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q.$$

Lze ukázat, že Raabeovo kritérium je silnější než podílové kritérium — jestliže o konvergenci řady lze rozhodnout podílovým kritériem, pak lze rozhodnout i Raabeovým. Takto lze postupovat dále a odvozovat silnější kritéria. Naznačme, jak zjemňování kritérií probíhá.

Obecnějším kritériem je *Kummerovo kritérium*. Nechť $\{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$ je posloupnost reálných čísel taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ je divergentní. Nechť

$$K_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$$

a nechť existuje $\lim K_n = K$. Jestliže je $K > 0$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, jestliže $K < 0$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Ukažme, jak lze z tohoto obecnějšího kritéria odvodit podílové a Raabeovo kritérium.

a) Položíme-li $c_n = 1$, pak $K_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1$. Je-li $K = \lim(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 0$, tj. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak řada diverguje. Je-li $K = \lim(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 0$, tj. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada konverguje.

b) Nechť $c_n = n$. Platí $K_n = n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1$. Je-li $\lim K_n = \lim n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1 > 0$, tj. $\lim n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1$, pak řada konverguje. Je-li $\lim K_n = \lim n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) < 1$, řada diverguje.

Existuje celá řada dalších kritérií pro ověření konvergence číselných řad s nezápornými členy, podrobnosti lze nalézt např. v [5]. Žádné z nich však není univerzální v tom smyslu, že bychom podle něj mohli rozhodnout o konvergenci (divergenci) libovolné řady s nezápornými členy. Takovým kritériem je pouze Cauchyovo-Bolzanovo kritérium (Lemma 1.1).

Příklad 2.5. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)} \quad .$$

Řešení. Poznamenejme, že podílovým kritériem nelze o konvergenci rozhodnout, neboť $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Raabeovo kritérium dává

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a\,n}{a+n+1} = a.$$

Je-li tedy $a > 1$, řada konverguje, je-li $a < 1$, řada diverguje. Pro $a = 1$ obdržíme řadu $\sum \frac{n!}{(n+1)!} = \sum \frac{1}{(n+1)}$, tedy řadu harmonickou (bez prvního členu), která diverguje.

Důležitým kritériem je kritérium jiného typu než dosavadní, které nám také ukazuje souvislost mezi nekonečnými řadami a nevlastními integrály:

Věta 2.6 (Integrální kritérium). *Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[1, \infty)$, která je na tomto intervalu nezáporná a nerostoucí. Nechť $f(n) = a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak řada $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Důkaz. Především poznamenejme, že funkce f je integrovatelná na každém intervalu $[1, b]$, kde $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 1$, neboť je monotonní. Označíme-li dále $F(t) = \int_1^t f(x)\,\mathrm{d}x$, je

F zřejmě neklesající na $[1, \infty)$. Protože f je nerostoucí na každém intervalu $[k, k+1]$, kde $k \in \mathbb{N}$, platí na tomto intervalu $a_{k+1} \leq f(x) \leq a_k$, tedy i

$$a_{k+1} = \int_k^{k+1} a_{k+1}\,\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} a_k\,\mathrm{d}x = a_k.$$

Sečtením těchto nerovností pro $k = 1, 2, \dots, n-1$ obdržíme

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1},$$

neboli $s_n - a_1 \leq F(n) \leq s_{n-1}$.

Nechť nyní řada $\sum a_n$ konverguje. Pak existuje $h \in \mathbb{R}$ tak, že $s_n \leq h$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a proto také $F(n) \leq h$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Protože F je neklesající, plyne odtud $F(t) \leq h$ pro $t \in [1, \infty)$. Podle věty o limitě monotonních funkcí existuje vlastní $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$, tj. konverguje nevlastní integrál $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

Nechť naopak $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak je funkce F shora ohraničená na $[1, \infty)$, takže existuje $q \in \mathbb{R}$ tak, že $F(t) \leq q$ pro $t \in [1, \infty)$. Je tedy i $F(n) \leq q$ a odtud $s_n \leq a_1 + q$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{s_n\}$ je shora ohraničená a neklesající, proto má vlastní limitu, tj. řada $\sum a_n$ konverguje. □

Příklad 2.6. Rozhodněte, zda konverguje řada:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ pro $a > 0$.

Řešení. a) Užijeme integrálního kritéria. Nejprve ověříme, zda je funkce $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ na intervalu $[2, \infty)$ nerostoucí. Platí $f'(x) = -\frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} < 0$, a proto je $f(x)$ na intervalu $[2, \infty)$ klesající. Zbývá vyšetřit, zda konverguje, resp. diverguje nevlastní integrál $\int_2^\infty \frac{1}{t \ln t}\,\mathrm{d}t$. Přímým výpočtem dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \int_2^x \frac{1}{t \ln t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{y}\,dy = \lim_{x\to\infty} (\ln(\ln x) - \ln(\ln 2)) = \infty,$$

a proto daná řada diverguje.

b) Užijeme integrálního kritéria. Položme $f(x) = \frac{1}{x^a}$ pro $x \in [1, \infty)$; což je pro $a > 0$ klesající funkce. Vyšetřujme konvergenci, resp. divergenci nevlastního integrálu této funkce na intervalu $[1, \infty)$. Platí

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a} &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-1} \qquad \text{pro } a > 1,\\
\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{t\to\infty} (\ln t) = \infty,\\
\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a} &= \frac{1}{1-a}\Big(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{a-1}} - 1\Big) = \infty \qquad \text{pro } a \in (0, 1).
\end{aligned}$$

Proto daná řada konverguje pro $a > 1$ a diverguje pro $a \in (0, 1]$.

Cvičení

2.1. Pomocí vhodného kritéria rozhodněte o konvergenci řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$ kde $a > 0, a \in \mathbb{R}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$

g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^a n}$ kde $a > 0, a \in \mathbb{R}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$

j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1\cdot 3 \cdots (2n-3)}{2\cdot 4 \cdots (2n-2)} \cdot \frac{1}{2n-1}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\frac{n}{e})^n$

o) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a}{\operatorname{arctg} n})^n$ kde $a > 0, a \in \mathbb{R}$

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

q) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

2.2. Najděte příklad řady $\sum a_n$ s kladnými členy, pro niž $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, ale která konverguje.

2.3. Existuje konvergentní řada $\sum a_n$ s nezápornými členy, pro niž $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$?

2.4. Nalezněte příklad řady $\sum a_n$ s kladnými členy, o jejíž konvergenci nebo divergenci

a) lze rozhodnout odmocninovým kritériem a nelze rozhodnout podílovým kritériem,

b) lze rozhodnout Raabeovým kritériem a nelze rozhodnout odmocninovým kritériem,

c) lze rozhodnout Raabeovým kritériem a nelze rozhodnout podílovým kritériem,

d) lze rozhodnout odmocninovým kritériem a nelze rozhodnout Raabeovým kritériem.

Výsledky cvičení

Kapitola 1

1.1. a) 1 b) $\frac{11}{18}$ c) $\frac{23}{90}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{2}$ f) 3 g) 5 h) $\frac{14}{15}$ **1.2.** a) $-\frac{4}{33}$ b) $\frac{27}{50}$ **1.3.** a)–c) divergují **1.4.** a) $x = 10$ b) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$. **1.5.** Součet obvodů je $8(2+\sqrt{2})$, součet obsahů je 8. **1.6.** Úloha vede k určení součtu nekonečné geometrické řady: $48 + 24 + 12 + 6 + \cdots$, jejíž součet je $s = 96$ cm^2. **1.7.** Obsah Sierpińského koberce je $P = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{9^{n+1}} = 0$.

Kapitola 2

2.1. a) konverguje b) konverguje c) konverguje d) diverguje e) konverguje pro $0 < a < 1$, diverguje pro $a \geq 1$ f) diverguje g) konverguje pro $a > 1$, diverguje pro $a \in (0, 1]$ h) konverguje i) konverguje j) konverguje k) konverguje l) diverguje m) konverguje n) diverguje o) diverguje pro $a \geq \frac{\pi}{2}$, konverguje pro $0 < a < \frac{\pi}{2}$ p) diverguje q) diverguje. **2.2.** $a_{2n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}}$, $a_{2n} = \frac{1}{3^{2n}}$. **2.3.** Neexistuje [Návod: je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak existuje $\{n_k\}$, $n_k \to \infty$ tak, že $\lim \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$. Označíme-li $b_k = a_{n_k}$, je řada $\sum b_k$ divergentní. Protože $a_n \geq 0$, je divergentní i řada $\sum a_n$. **2.4.** viz [5].

Kapitola 3

3.1. a) konverguje b) konverguje c) diverguje d) diverguje e) konverguje f) konverguje. **3.2.** a) konverguje neabsolutně b) konverguje absolutně c) konverguje neabsolutně d) diverguje e) konverguje absolutně f) konverguje absolutně g) konverguje absolutně h) konverguje neabsolutně. **3.3.** a) Pro $x > 0$ řada konverguje absolutně, pro $x \leq 0$ řada diverguje. b) Pro $x \in (\frac{1}{e}, e)$ řada konverguje absolutně, pro ostatní x řada diverguje. c) Pro $|x| < 2$ řada konverguje absolutně, pro $|x| > 2$ a $x = 2$ diverguje, pro $x = -2$ konverguje neabsolutně. d) Pro $x \geq 0$ řada konverguje absolutně, pro $x < 0$ řada diverguje.